

На правах рукописи



Червов Виктор Васильевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ
В ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ**

05.13.18 —математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН) и Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий» (ФИЦ ИВТ).

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Черных Геннадий Георгиевич

Официальные оппоненты: **Белолипецкий Виктор Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск, главный научный сотрудник

Бердников Владимир Степанович
доктор физико-математических наук, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, главный научный сотрудник

Кирдяшкин Алексей Анатольевич
доктор геолого-минералогических наук, профессор РАН, Институт геологии и минералогии им. В.С. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, заведующий лабораторией

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, г. Москва

Защита состоится 3 июня 2022 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета Д 999.141.03 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий», Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» по адресу 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ФИЦ ИВТ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФИЦ ИВТ:
<http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/chervov-vv>

Автореферат разослан «___» _____ 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



А.С. Лебедев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Ключевым вопросом при изучении недр планеты является выяснение причин и условий, определяющих пространственно-временную эволюцию конвекции в мантии Земли, поскольку именно эта характеристика во многом определяет кинематику литосферных плит и геологическую историю развития континентальных областей. Таким образом, исследование конвективных течений в мантии является одной из центральных задач геофизики. Работы, выполненные в этом направлении в последние десятилетия, существенно расширили наши представления о строении и составе недр планеты. Важнейшая роль в процессе получения полезной информации по этому вопросу отводится численным экспериментам.

Конвективные течения вязких несжимаемых жидкостей относятся к классическому разделу гидродинамики. Численному моделированию конвективных процессов на основе уравнений Навье–Стокса посвящено большое количество работ как в России, так и за её пределами.

Результаты расчётов широкого класса классических двумерных задач конвекции в переменных «функция тока–завихренность» ($\psi-\omega$) представлены В.И. Полежаевым и соавторами. В их работах рассмотрены вопросы моделирования конвекции; описаны разностные схемы интегрирования уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска, подробно рассмотрены различные аппроксимации граничных условий для завихренности в переменных ($\psi-\omega$).

Е.Л. Таруниным приведены результаты численного решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в этих переменных и применён метод последовательности сеток к задачам свободной конвекции в замкнутых объёмах. Численным моделированием классических задач конвекции в этих переменных занимались также Б.М. Берковский, Е.Ф. Ноготов, А.Ф. Воеводин, В.В. Остапенко, Ю.В. Пивоваров, С.М. Шугрин. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах А.Ф. Воеводина, О.Н. Гончаровой, Т.В. Юшковой и А.Ф. Воеводина, Т.В. Протопоповой. Основанные на записи уравнений свободной конвекции в естественных переменных итерационные методы решения задач стационарной свободной конвекции, включая итерационные методы расщепления, построены и обоснованы Г.М. Кобельковым.

В.С. Бердниковым и соавторами разработаны эффективные численные модели двумерных и трёхмерных конвективных течений несжимаемых жидкостей с применением методов конечных разностей, конечных элементов и решены важные прикладные задачи, связанные с выращиванием кристаллов.

Конвективному теплообмену в двумерных постановках задач геодинамики посвящены работы D.L. Turcotte, D.P. McKenzie, G.A. Houseman, N.O. Weiss, U. Christensen, L. Fleitout, D.A. Yuen, P. Olson, В.П. Трубицына, Н.П. Мошкина, Е.В. Рычковой, Ж.Л. Коробицыной, С.А. Тычкова, Г.Г. Черных и многих других. В работах G.A. Houseman, D.P. McKenzie, P. Molnar, D.R. Moore,

N.O. Weiss и др. применялся двухполевой метод при интегрировании двумерных уравнений конвекции. Работы U. Christensen посвящены двумерному и трёхмерному моделированию конвекции в мантии Земли на основе уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска с вязкостью, зависящей от температуры и давления. L. Fleitout, D.A. Yuen для численного интегрирования уравнений Навье–Стокса в переменных u, v, p с вязкостью, зависящей от температуры и давления, применили метод, основанный на распределении прямоугольных конечных элементов в лагранжевой системе координат. Структурные элементы литосферы в их работах, такие, например, как континентальная плита, кратон или слэб, возникают в результате конвективных течений в мантии и интерпретируются в зависимости от величины вычисленной вязкости.

Очень важное и полезное исследование выполнено группой зарубежных авторов¹. Ими решена модельная задача о конвекции в кубической области с применением большого числа существенно различающихся численных алгоритмов. Результаты расчётов этой работы являются геодинамическим тестом; численные модели настоящей диссертационной работы детально сопоставлялись с ними.

При решении трёхмерных задач «классической» гидродинамики успешно используется целый ряд подходов, основанных как на применении постановок задач в естественных переменных, так и в переменных «векторный потенциал–завихренность» ($\psi-\omega$). Метод искусственной сжимаемости (Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко; A.J. Chorin) широко применяется в задачах гидродинамики несжимаемой жидкости. Весьма популярными являются разработанные ранее и развиваемые в настоящее время методы расщепления по физическим процессам и пространственным переменным (О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, Г.М. Кобельков, В.М. Ковеня, Р. Пейре, А.И. Толстых, Т.Д. Тейлор и др.).

Задачи двумерной и трёхмерной конвекции и тектоника плит последовательно рассмотрены В.П. Трубицыным и соавторами. Ими исследовались перемещения литосферных плит. Построены модели мантийной конвекции, в которых, с учётом напряжений, возникающих на границах плит, создавалась самосогласованная динамическая теория тектоники литосферных плит; рассмотрены фазовые переходы в мантийной жидкости; изучалось влияние тепловых источников на режимы конвекции.

В концепции тектоники литосферных плит исследование процессов, связанных со спредингом (раздвижением плит) и субдукцией (погружением плит в мантию Земли), являются хорошо известными задачами геодинамики. Отметим книгу Л.И. Лобковского [Геодинамика зон спрединга, субдукции и двухъярусная тектоника плит / Л.И. Лобковский. – М. Наука. – 1988], в которой представлены впервые исследованные на строгом количественном уровне с позиций механики

¹ Busse F.H. 3D Convection at infinite prandtl number in Cartesian geometry - a benchmark comparison / F.H. Busse, U. Christensen, [et al.] // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. - 1993. - Vol. 75. - P. 39-59.

сплошной среды комплексные геодинамические модели процессов спрединга и субдукции. В рамках упругопластической реологии литосферы рассматривается и анализируется состояние погружающейся плиты под островную дугу. Дальнейшее исследование субдукции с учётом верхнемантийной конвекции осуществлено в работе [Л.И. Лобковский, М.М. Рамазанов, В.Д. Котелкин. Геодинамика и тектонофизика, 2021], где построен численно-аналитический метод решения задачи в двумерной и трёхмерной постановках. Результаты исследований используются при изучении мел-кайнозойской геодинамики Центрально-Восточной Азии и Арктики.

В книге Н.Л. Добрецова, А.Г. Кирдяшкина, А.А. Кирдяшкина² на основе геофизических подходов изучаются зоны субдукции островодужного и андийского типов. Лабораторные эксперименты А.А. Кирдяшкина и А.Г. Кирдяшкина позволили найти профили скоростей свободноконвективного течения в астеносфере под срединно-океаническим хребтом (СОХ) при подвижной литосфере. Кроме того, получено выражение для касательного напряжения на кровле астеносферы под СОХ и определена суммарная сила трения, действующая со стороны астеносферного потока на литосферную плиту. В рамках вязкоупругой двумерной постановки С.Н. Коробейниковым с соавторами [С.Н. Коробейников, В.В. Ревердатто, О.П. Полянский (и др.), Сибирский журнал вычислительной математики, 2009, 2011] численно решалась задача математического моделирования субдукции, возникающей при столкновении плит. Получено, что при подходящем выборе констант все модели с геометрической неоднородностью плиты приводят к глубокой субдукции. Расчёты, выполненные с моделями плит с «гладким дном» показали, что при столкновении плит происходит подвиг одной плиты под другую.

Анализ известных математических моделей конвекции в верхней мантии Земли показывает, что отсутствуют трёхмерные численные модели, одновременно учитывающие реальную геометрию кратонов и нелинейную зависимость вязкости от температуры и литостатического давления. В классической гидродинамике широко используются как подходы, основанные на переменных ($\psi-\omega$), так и на естественных переменных с применением неявных методов расщепления. Уравнения конвективных процессов в верхней мантии Земли существенно отличаются от уравнений классической гидродинамики прежде всего бесконечными (очень большими) значениями числа Прандтля, а также значительным варьированием и нелинейной зависимостью вязкости мантийного вещества от литостатического давления и температуры. К моменту начала исследований автора диссертации не было систематического анализа применения вышеупомянутых подходов к решению трёхмерных задач геодинамики.

В связи с этим задача построения эффективных численных моделей и решения на их основе трёхмерных задач конвекции в верхней мантии Земли представляется весьма **актуальной**.

² Добрецов, Н.Л. Глубинная геодинамика, 2-е издание. / Н.Л. Добрецов, А.Г. Кирдяшкин, А.А. Кирдяшкин. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2001. – 409 с.

Цель диссертационной работы

Цель диссертационной работы состоит в разработке и развитии трёхмерных численных моделей и комплексов программ расчёта тепловой конвекции в верхней мантии Земли в естественных переменных и переменных $\psi-\omega$ с применением неявных методов расщепления по пространственным переменным и исследовании особенностей динамики мантии континентальных областей Земли с учётом реальной геометрии кратонов и процессов, происходящих в зонах спрединга (раздвижения литосферных плит) и субдукции (погружения плит в мантию Земли).

Научная новизна

Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем: построены оригинальные численные методы и алгоритмы решения задач конвекции в верхней мантии Земли, основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным; с их применением созданы и детально оттестированы комплексы программ расчёта конвективных процессов в верхней мантии Земли; впервые изучена конвекция под модельными и реальными кратонами; построена основанная на концепциях Флейто-Йена и Тычкова-Трубицына оригинальная трёхмерная численная модель конвекции в зонах спрединга и субдукции.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов достигается проведением многочисленных тестовых расчётов, показавших адекватность построенных численных моделей, детальным сопоставлением с известными аналитическими и числовыми данными при решении модельных задач, применением мер контроля точности найденных решений, соответствием рассчитанных и наблюдаемых геолого-геофизических характеристик.

Практическая значимость результатов

Практическая значимость разработанных численных моделей и результатов исследований, полученных в диссертационной работе, определяется изучением широкого класса конвективных течений в верхней мантии Земли:

1. Изучена тепловая гравитационная конвекция под модельными кратонами. Обоснована трёхмерность конвекции под модельными кратонами протяжённой формы. В численных экспериментах выявлена мелкомасштабная мода конвекции, наблюдаемая на периферии кратонов; предложен механизм траппового магматизма около бортов Сибирского кратона в триасе.

2. Осуществлено численное моделирование конвективных течений под литосферой Евразии с учётом близких к точным конфигурациям элементов литосферных блоков (Сибирский кратон, Русская, Западно-Сибирская и Китайские платформы, Тарим, Центрально-Азиатский складчатый пояс, Индийская плита и др.). Найдены температурные поля, в целом согласующиеся с наблюдаемым

тепловым полем на поверхности Земли и с сейсмотомографическими данными в юго-западной оконечности Сибирского кратона и в восточной части Центральной Монголии.

3. Построены численные модели спрединга и субдукции. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. Указан механизм возникновения погружающихся холодных гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы под воздействием архимедовых сил. Получены тепловые аномалии, имеющие вид слэбов, погружённых в мантию. Выявлены тепловые аномалии, имеющие вид тяжёлой гравитационно-неустойчивой холодной «капли», возникновение и отрыв которой от кромки континента по времени хорошо согласуется с теоретическими оценками отрыва приращённого в процессе спрединга мантийного материала с образованием слэба, погружающегося в мантию.

4. Созданные диссертантом численные модели и комплексы программ могут быть использованы для исследования широкого класса задач конвекции в верхней мантии Земли; при планировании лабораторных и натурных экспериментов, обработке известных экспериментальных данных, построении новых более полных численных моделей.

Теоретическая значимость (ценность) результатов

Построены основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным трёхмерные численные модели и комплексы программ расчёта конвекции в верхней мантии Земли в декартовых и сферических координатах. Разработанные численные алгоритмы и комплексы программ вносят существенный вклад в решение фундаментальной проблемы математического моделирования конвекции в мантии Земли.

На защиту выносятся следующие научные положения и результаты

1. Численные методы, алгоритмы и комплексы программ для расчёта трёхмерных задач конвекции в верхней мантии Земли в декартовых и сферических координатах, основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным.

2. Численные модели конвекции под модельными кратонами и обоснование трёхмерности конвекции под протяжёнными кратонами; найденная в численных экспериментах мелкомасштабная мода конвекции; обоснование траппового магматизма.

3. Результаты численного моделирования конвективных течений под литосферой Центральной Азии, подтверждающие результаты исследования модельных структур на примере Сибирского кратона и его ближайшего окружения (Тарим и Северо-Китайский кратон).

4. Результаты численного моделирования конвективных течений под литосферой Евразии с учётом конфигураций элементов литосферных блоков, входящих в Евразийский континент (Сибирский кратон, Русская, Западно-Сибирская и Китайские платформы, Тарим, Центрально-Азиатский складчатый пояс, Индийская плита и др.); полученные температурные поля, согласующиеся с сейсмотомографической низкоскоростной аномалией на юго-западной оконечности Сибирского кратона и в восточной части Центральной Монголии.

5. Результаты трёхмерного численного моделирования спрединга под океанической литосферой и численная модель субдукции под континентальной литосферной плитой, демонстрирующие погружающийся под континент поток холодного мантийного вещества; оценки геодинамических параметров мантийных течений в расчётной области.

Представление работы

Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

- Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях» (23 - 26 июня 2003, С-Петербург).
- Международная конференция по вычислительной математике (Новосибирск, 2004).
- Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях» (Москва, 2005).
- XIII International Conference on the Methods of Aerophysical Research (Novosibirsk, 2007).
- International Conference «Fluxes and Structures in Fluids» (St-Petersburg, 2007).
- V совещание Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям (Новосибирск, ИВТ СО РАН, 6 - 8 февраля 2007).
- Международная конференция «Потоки и Структуры в Жидкостях: Физика Геосфер» (Москва, 2009).
- Всероссийский симпозиум с международным участием «Кайнозойский континентальный рифтогенез» (Иркутск, Ин-т земной коры СО РАН, 2010).
- Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, ВГУ, 2010).
- International Conference on the Methods of Aerophysical Research (Novosibirsk, ITAM SB RAS, 2010).
- Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ-2011. Новосибирск, 2011.
- Современные проблемы геодинамики и геоэкологии внутриконтинентальных орогенов к 75-летию со дня рождения Ю.А. Трапезникова. Международный симпозиум (Бишкек, НС РАН, 2011).
- Современное состояние наук о Земле: Международная конференция памяти В.Е. Хаина (Москва, 1-4 февраля 2011).

- Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: Международная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011).
- Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Всероссийская конференция (Новосибирск, 2012).
- Тектонофизика и актуальные вопросы наук о Земле. Третья тектонофизическая конференция в ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН (Москва, 8 - 12 октября 2012).
- Методы создания, исследования и идентификации математических моделей: Международная научная конференция, посвящённая 85-летию со дня рождения А.С. Алексеева (Новосибирск, 10 - 13 октября 2013).
- 50 лет сейсмологического мониторинга Сибири. Всероссийская конференция с международным участием (Новосибирск, 21 - 25 октября 2013).
- Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015» (АПВМ-2015), посвящённая 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (Новосибирск, 19 - 23 октября 2015).
- Четвертая тектонофизическая конференция в ИФЗ им. О. Ю. Шмидта РАН (Москва, 3 - 8 октября 2016).
- Международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017» (ВМ 2017) (Новосибирск, 25 - 30 июня 2017).
- Международная конференция «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвящённая 90-летию со дня рождения академика Анатолия Семёновича Алексеева (Новосибирск, 8 - 10 октября 2018).

Постановки задач и методы их решения детально излагались и обсуждались на семинарах и совещаниях, руководимых академиком РАН А.С. Алексеевым, академиком РАН Б.Г. Михайленко, академиком РАН Ю.И. Шокиным, д.ф.-м.н. В.М. Ковеней, д.т.н. В.Б. Барахниным, академиком РАН Н.Л. Добрецовым, академиком РАН В.А. Верниковским, чл.-корр. РАН В.П. Трубицыным, чл.-корр. РАН И.Ю. Кулаковым, чл.-корр. РАН В.В. Пухначёвым, д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюком, д.ф.-м.н. С.Б. Медведевым.

Публикации

Содержание диссертации и предшествующие работы по теме диссертационной работы отражены в опубликованных диссертантом 55 работах, в том числе 18 статей [1–18] в ведущих научных журналах, входящих в рекомендованный список ВАК РФ. Созданы и зарегистрированы четыре комплекса компьютерных программ, отвечающих теме диссертации [19–22].

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражены в опубликованных авторских работах. Все результаты, полученные в совместных исследованиях и представленные в диссертации, согласованы с

соавторами. В совместных публикациях диссертант занимался постановками задач, разработкой численных алгоритмов и их реализацией; проведением и анализом результатов расчётов. В работах с участием к.г.-м.н. Н.А. Бушенковой, чл.-корр. РАН И.Ю. Кулакова, к.г.-м.н. Е.В. Деева, д.г.-м.н. О.П. Полянского, д.г.-м.н. С.А. Тычкова, н.с. А.Н. Василевского, д.г.-м.н. А.Г. Владимирова, д.г.-м.н. А.Ю. Казанского, д.г.-м.н. Д.В. Метелкина, академика РАН Н.Л. Добрецова и др. автором обсуждались постановки геолого-геофизических задач с последующей интерпретацией результатов; выполнены основанные на построенных численных моделях и комплексах программ численные расчёты изучаемых течений. Физико-математические постановки задач диссертационной работы и численные алгоритмы их решения обсуждались с д.г.-м.н. С.А. Тычковым и д.ф.-м.н. Г.Г. Черных.

Представленные в диссертации результаты получены при проведении исследований в рамках Приоритетного направления СО РАН «Геодинамическая и геохимическая эволюция литосферы и мантии Земли: тектоника, магматизм, флюидный режим и металлогения», по программе СО РАН №26.2 (1999-2003 гг.). «Геодинамическая эволюция литосферы Азии: тектоника, магматизм, метаморфизм, геохимия и металлогения основных её этапов» (2002-2004 гг.), а также при проведении исследований в рамках проектов РФФИ (2005-2016 гг.), проектов по программам фундаментальных исследований РАН и её отделений (2006-2016 гг.), интеграционных проектов СО РАН (1999-2018 гг.), программы Президиума РАН АААА-А18-118021490041-5.

Структура и объем диссертации

Текст диссертации объёмом 312 страниц включает введение, пять глав, отражающие методику, содержание и результаты выполненных исследований, заключение и список литературы.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы. Приведён обзор работ по тематике диссертации. Сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В **Главе 1**, носящей вспомогательный характер, приведены основные уравнения, описывающие движение вязкой жидкости в гравитационном поле Земли. Выписаны начальные данные, приведены общие представления о граничных условиях, характерных для задач конвекции в мантии Земли. Излагается постановка задачи в переменных «векторный потенциал–завихренность» для трёхмерных задач конвекции в мантии Земли и приведены граничные условия в этих переменных.

В качестве математической модели выбиралась известная система безразмерных уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска и геодинамическом приближении:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\text{Ra} T) \mathbf{e}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} T) = \nabla^2 T, \quad (3)$$

где $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, t – время, p – давление (дефект давления), T – температура (дефект температуры), $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ – безразмерный вектор, $\text{Ra} = \alpha g_z \rho_0 d^3 \Delta T / (\eta_0 \chi)$ – число Релея, α – температурный коэффициент расширения жидкости, g_z – z-компонента вектора силы тяжести $\mathbf{g}$, ΔT – разность между температурой на подошве верхней мантии и температурой на поверхности Земли, d – расстояние от поверхности Земли до нижнемантийной границы, χ – коэффициент температуропроводности, ρ_0 и η_0 – характерные значения плотности ρ и динамической вязкости η соответственно. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры.

В декартовых координатах компоненты тензора вязких напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \sigma_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \sigma_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \sigma_{zy} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Вопрос о применимости приближения Обербека–Буссинеска возникает, в особенности, в связи с большими масштабами течения, существенными изменениями температуры и огромными значениями вязкости. Теоретические оценки применимости приближения даны В.В. Пухначёвым (1994).

В соответствии с этими оценками приближение применимо, если параметр

$$\mathfrak{P} = g_z d^3 / (\eta_0 \chi) \geq 1.$$

Для задач конвекции в верхней мантии Земли, как показывают вычисления, $\mathfrak{P} > 100$.

При исследовании течения в прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \quad (4)$$

в модельной постановке (Рисунок 1) ставятся следующие граничные условия:

на поверхностях $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = X$; $y_1 \leq y \leq y_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$:

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

на поверхностях $y = y_1 = 0$, $y = y_2 = Y$; $x_1 \leq x \leq x_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$: (6)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

на поверхности $z = z_1 = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2:$

$$u = v = w = 0; \quad T = 1; \quad (7)$$

на поверхности $z = z_2 = Z, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2:$

$$u = v = w = T = 0. \quad (8)$$

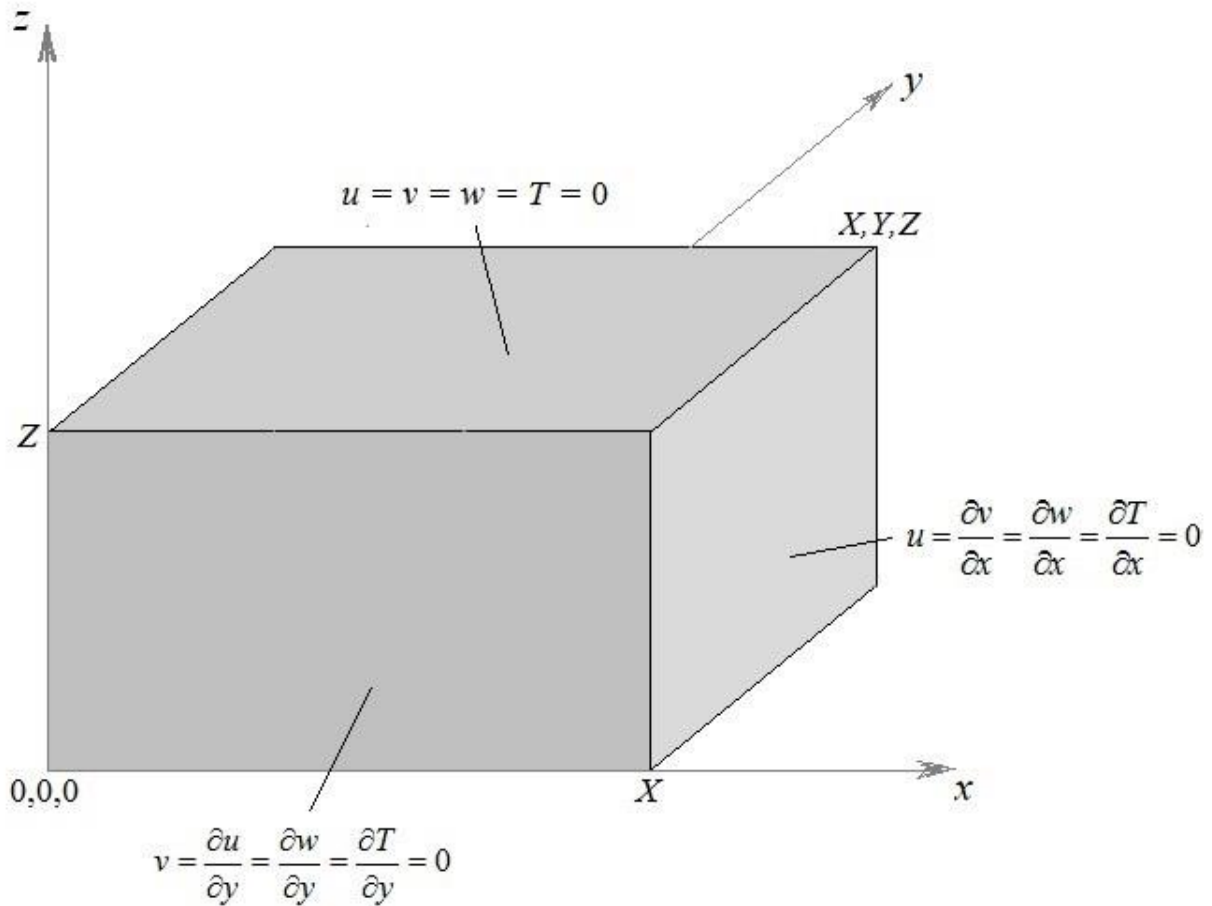


Рисунок 1 – Граничные условия в параллелепипеде $\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$ для компонент вектора скорости и температуры в декартовых координатах

Система уравнений (1)–(3) устроена таким образом, что при $t = 0$ задаются начальные условия лишь для температуры

$$T(x, y, z, 0) = \tilde{T}_0(x, y, z). \quad (9)$$

Система уравнений (1)–(2) и граничные условия (5)–(8) могут быть записаны в переменных «векторный потенциал–завихренность» ($\psi - \omega$), которые вводятся следующим образом:

$$\psi = i\psi^x + j\psi^y + k\psi^z, \quad \omega = i\omega^x + j\omega^y + k\omega^z.$$

Применив операцию rot к уравнению (2) и учитывая соотношения $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\omega}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$, получим векторное уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

и векторное уравнение для завихренности:

$$\nabla^2 (\eta \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{F}. \quad (11)$$

Компоненты вектора $\mathbf{F} = iF^x + jF^y + kF^z$ представляются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F^x &= \omega^x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ F^y &= \omega^y \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ F^z &= \omega^z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial z} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

При таком подходе уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно, а давление p при необходимости можно восстановить из решения задачи Неймана для соответствующего уравнения Пуассона, являющегося следствием уравнений (1)–(2).

Глава 2 посвящена построению и тестированию численных моделей. Представлены построенные автором численные методы и алгоритмы решения трёхмерных задач конвекции в верхней мантии Земли, основанные на переменных «векторный потенциал–завихренность». В естественных переменных построены численные модели конвекции в мантии Земли на основе неявного метода расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления и на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости.

2.1. В переменных «векторный потенциал–завихренность» ($\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\omega}$) численный алгоритм решения задачи [2] сводится на каждом слое по времени к последовательному численному интегрированию скалярных уравнений системы (10), (11), (3). В качестве итерационной схемы и схемы интегрирования выбиралась схема стабилизирующей поправки.

2.2. Численное моделирование трёхмерных конвективных течений в мантии Земли, основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1)–(3) с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости³ и метода дробных шагов осуществлялось по следующему алгоритму (стрелка означает переход к символическим обозначениям разностных аппроксимаций):

$$\frac{\partial p^{m,n+1}}{\partial \tau} = -c^2 (\nabla \cdot \mathbf{V})_h^{m,n+1} \Rightarrow p^{m,n+1} = p^{m,n} - \Delta \tau \cdot c^2 \nabla_h \cdot \mathbf{V}^{m,n+1}, \quad (12)$$

$$\frac{v_i^{m,n+1} - v_i^{m,n}}{\Delta \tau} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_h^{m,n+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right)_h^{m,n+1} + \text{Ra} \cdot T^m \cdot e_i, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{m+1}}{\partial t} + \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) \right)_h &= \nabla_h^2 T^{m+1} \Rightarrow \\ T^{m+1} &= T^m - \Delta t \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1} \right)_h, \end{aligned} \quad (14)$$

где c^2 – релаксационный параметр; $i, k = 1, 2, 3$, по повторяющимся индексам производится суммирование; Δt – шаг по времени, $\Delta \tau$ – итерационный параметр, индекс h означает сеточный аналог выражения в скобках.

Ограничение на c^2 и $\Delta \tau = \tau_{n+1} - \tau_n = \text{const}$ в расчётах выбиралось следующим:

$$\Delta \tau < \min (h_x, h_y, h_z) / c.$$

В исследуемом объёме при $t = 0$ ($m = 0$) задавалось начальное распределение температуры (9), удовлетворяющее граничным условиям (5)–(8). Давление и компоненты скорости вычислялись по начальным условиям для температуры путём решения соответствующих уравнений. Из уравнения (13) методом стационарирования вычисляется поле скорости $\mathbf{V}^{m,n+1}$ с привлечением уравнения (12), из которого давление $p^{m,n+1}$ на верхнем слое по фиктивному времени выражается через дивергенцию поля скорости и подставляется в (13). При аппроксимации вязких слагаемых в (13) применялись консервативные аппроксимации. Путём решения (14) вычисляется поле температуры на временном слое $m+1$. Процесс повторяется до некоторого значения $t_m = m \cdot \Delta t$. Решения разностных уравнений (13), (14) находятся с применением схемы стабилизирующей поправки.

2.3. Численное моделирование, основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1)–(3) с применением неявного метода расщепления по пространственным переменным с поправкой давления осуществлялось по следующему алгоритму⁴:

³ Пейре, Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т.Д. Тейлор. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1986. – 351 с.

⁴ Толстых, А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А.И. Толстых. – М.: Наука, 1990. – 230 с.

$$\frac{\tilde{v}_i - v_i^{m,n}}{\Delta\tau} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_h^{m,n} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{m,n}}{\partial x_i} \right) \right)_h + \text{Ra} \cdot T^m \cdot e_i, \quad (15)$$

$$\nabla_h^2(\delta p) = \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau}, \quad (16)$$

$$(\delta p) = p^{m,n+1} - p^{m,n}, \quad (17)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{m,n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta\tau} = -\nabla_h(\delta p)^{m,n+1}, \quad (18)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1} \right)_h, \quad (19)$$

где индекс h по-прежнему означает сеточный аналог выражения в скобках.

В области (4) при $t = 0$ ($m = 0$) задаётся начальное распределение температурного поля, удовлетворяющее условиям (5)–(8). Компоненты скорости и давление полагаются нулевыми. Численная реализация алгоритма сводится к выполнению следующих этапов (с применением схемы стабилизирующей поправки и как схемы интегрирования, и как итерационной схемы).

1) На первом этапе находится промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ из векторного уравнения (15).

2) Методом стационарирования из уравнения (16) рассчитывается поле разности давлений (δp)

$$\frac{(\delta p)^{s+1} - (\delta p)^s}{\Delta\tau} = \nabla_h^2(\delta p)^{s+1} - \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau}$$

с условиями Неймана на границах до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости по внутреннему индексу s (расчёт производится на слое m по времени и на слое n по фиктивному времени для компонент вектора скорости). Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$\frac{\max_{i,j,k} |(\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s+1} - (\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s}|}{\max_{i,j,k} |(\delta p)_{i,j,k}^{m,n,s}|} < \varepsilon, \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторая малая положительная величина.

После выполнения условия сходимости (20) из уравнения (17) вычисляется давление на $(n+1)$ -м слое:

$$p^{m,n+1} = (\delta p)^{m,n,s+1} + p^{m,n}.$$

3) Из уравнения (18) отыскивается окончательное поле скорости на итерационном слое $n+1$ для временного слоя m .

4) Путём решения уравнения (19) с шагом по времени Δt вычисляется поле температуры на временном слое $m+1$.

Процесс повторяется до некоторого значения $t_m = m \cdot \Delta t$. Как и в предыдущем подходе, задача решалась как на разнесённой, так и на неразнесённой равномерных сетках.

2.4. Осуществлены программные реализации [19–22] численных моделей. Проведено детальное сопоставление с известными тестовыми решениями¹.

При решении тестовой задачи¹ размерные значения параметров течения (в системе СИ) принимались следующими:

$$d = 2\,700\,000 \text{ м}, \Delta T = 3\,700^\circ\text{С}, \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{С}^{-1}, \\ \rho = 3300 \text{ кг/м}^3, g_z = 10 \text{ м/с}^2, \eta_0 = 1,20165 \cdot 10^{24} \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$$

В качестве начального распределения температуры $\tilde{T}$ выбиралась функция

$$\tilde{T}(x, y, z) = (1 - z) + \delta \cdot (\cos(\pi x / X) + \cos(\pi y / Y)) \sin(\pi z), \delta = 0,2. \quad (21)$$

Поле обезразмеренной переменной вязкости задавалось формулой

$$\eta(T) = \exp(\theta / (T + \Theta) - \theta / (0,50 + \Theta)), \quad \theta = 225 / \ln(q) - 0,25 \ln(q),$$

$$\Theta = 15 / \ln(q) - 0,50, \quad q = \eta|_{T=0} / \eta|_{T=1} = 20.$$

Для сопоставления с тестовым решением¹ расчёты проводились в прямоугольном параллелепипеде (4), в котором $X = Y = Z = 1$. С учётом масштабного множителя при вязкости $\eta_0 = 1,20165 \cdot 10^{24} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ число Релея $Ra = 20000$.

В задаче¹ с переменной вязкостью вычислялись и сопоставлялись следующие характерные величины:

(i) среднеквадратичная скорость

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{X \cdot Y \cdot Z} \iiint_A (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz};$$

(ii) число Нуссельта (Nu), определяемое по формуле $Nu = -(X \cdot Y)^{-1} \iint_{S_{top}} T_z dx dy$, где

$$T_z = \frac{\partial T}{\partial z}, S_{top} - \text{верхняя поверхность параллелепипеда};$$

(iii) значение вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя;

(iv) значение теплового потока $Q = -\partial T / \partial z$ в угловых точках верхней поверхности куба;

(v) интегральный параметр, вычисляемый по формуле $\lambda(x, z) = \int_0^Y \frac{\partial T}{\partial z} dy$ вдоль линии, параллельной оси y , начинающейся точками $(0, 0, 1/4)$, $(1/2, 0, 1/4)$, $(1, 0, 1/4)$ фронтальной (xz) -плоскости;

(vi) средняя температура $T_m = \iint_{S_z} T dx dy$, вычисляемая на горизонтальных сечениях

области $S_{z=0,75}$ и $S_{z=0,50}$, на глубинах $z = 3/4$ и $z = 1/2$;

(vii) значение вертикальной компоненты вектора завихренности ω^z в точке $(3/4, 1/4, 3/4)$.

Таблица 1 – Сопоставление с результатами¹; расчёты автора на сетке $(32 \times 32 \times 64)$. Методы расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления (*РФП*), искусственной сжимаемости (*ИС*) и с применением векторного потенциала – завихренности (*ВПЗ*)

Наименование параметров	<i>Chr</i>	<i>Che РФП</i>	<i>Che ИС</i>	<i>Che ВПЗ</i>
Nu	3,039	3,040	2,990	3,039
<i>Vrms</i>	35,132	35,740	35,160	35,180
$w(X, Y, 1/2)$	–58,230	–58,260	–59,040	–58,210
$T(X, Y, 1/2)$	0,239	0,242	0,240	0,238
$T_m(3/4)$	0,566	0,570	0,566	0,563
$T_m(1/2)$	0,582	0,583	0,587	0,579
$\omega^z(3/4, 1/4, 3/4)$	–11,125	–10,963	–11,026	–11,250

В Таблице 1 результаты расчётов диссертации сопоставляются с расчётными данными Кристенсена, как наиболее полными из имеющихся в статье¹ (из соображений краткости сопоставляется лишь часть параметров).

Таблица 2 – Результаты расчётов на последовательности сеток и сравнение времён счёта; *Chr* – результаты, полученные Кристенсеном (второй столбец), *Che* – результаты автора (3–5 столбцы)

Наименование параметров	<i>Chr</i>	<i>Che</i>			Относительная ошибка в процентах		
		32^3	64^3	128^3	32^3	64^3	128^3
Nu	3,0393	3,0473	3,0431	3,0393	0,2632	0,1250	0,0000
<i>Vrms</i>	35,1320	35,2439	35,1546	35,1280	0,3185	0,0643	0,0114
$w(0,0,1/2)$	165,9100	166,2674	166,0415	165,8993	0,2154	0,0793	0,0064
$w(0,Y,1/2)$	–26,7200	–27,1400	–26,8274	–26,7199	1,5719	0,4019	0,0004
$w(X,Y,1/2)$	–58,2300	–59,0922	–58,4458	–58,2301	1,4807	0,3706	0,0002
$T(0,0,1/2)$	0,9053	0,9073	0,9058	0,9053	0,2209	0,0552	0,0000
$T(0,Y,1/2)$	0,4957	0,5007	0,4969	0,4956	1,0087	0,2421	0,0202
$T(X,Y,1/2)$	0,2393	0,2438	0,2404	0,2392	1,8805	0,4597	0,0418
$Q(0,0)$	5,8339	5,8395	5,8356	5,8339	0,0960	0,0291	0,0000
$Q(0,Y)$	1,7136	1,7313	1,7179	1,7136	1,0329	0,2509	0,0000
$Q(X,Y)$	0,7684	0,7752	0,7700	0,7684	0,8850	0,2082	0,0000
$\lambda(0,1/4)$	–0,5059	–0,4954	–0,5032	–0,5056	2,0755	0,5337	0,0593
$\lambda(X/2,1/4)$	–0,1921	–0,1986	–0,1937	–0,1922	3,3837	0,8329	0,0521
$\lambda(X,1/4)$	–0,1388	–0,1400	–0,1391	–0,1388	0,8646	0,2161	0,0000
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	–11,1250	–10,9746	–11,0903	–11,1251	1,3519	0,3119	0,0009
Время счёта		16 сек	113 сек	1157 сек	–		

Относительная ошибка вычислялась по формуле: $Err = \left| \frac{Che - Chr}{Chr} \right| \cdot 100\%$ и

составила не более 2 процентов для всех трёх методов. Здесь *Err* – величина относительной «ошибки», *Chr* – результат по Кристенсену, *Che* – результат, полученный автором.

Результаты расчётов близки к результатам Кристенсена¹, что свидетельствует о достаточно высокой эффективности построенных численных моделей. Аналогичная близость решений получена и для теста¹ с постоянной вязкостью.

2.5. Хорошо известным эффективным подходом к решению задач математической физики является метод последовательности сеток [Р.П. Федоренко, 1964]. Результаты его применения в диссертационной работе приведены в Таблице 2. При непосредственных вычислениях на сетке (128×128×128) потребовалось ~180 минут на ПК с процессором AMD Ryzen 5 1500X с тактовой частотой 3600 МГц. Таким образом, выигрыш во времени счета на последовательности сеток более чем восьмикратный.

На последовательности сеточных решений выполнена экстраполяция по Ричардсону⁵, которая позволила существенно сократить время счёта. В частности, на модельной задаче (решение уравнения Пуассона) дополнительный выигрыш (для сеток 16×16×16, 32×32×32, 64×64×64) составил ~14 раз. При этом рассчитанные на первых двух сетках решения комбинировались и сопоставлялись с расчётом на третьей сетке. Существенный выигрыш (порядка 24 раз) во времени счёта достигался также и в модельных задачах (с постоянной и переменной вязкостью) Busse et al¹. Экстраполяции по Ричардсону была успешно применена при решении задачи о конвекции в верхней мантии Земли под равномерной литосферой. Приведено описание комплексов программ, отвечающих теме диссертации.

В **Главе 3** представлены результаты численного моделирования конвекции в верхней мантии Земли под континентальной литосферой переменной толщины. Последовательно рассмотрены следующие модельные задачи эволюции мантийного вещества в параллелепипеде с размерами по горизонтали 4200 км × 4200 км и высотой в 700 км:

3.1. Тепловая конвекция под литосферной плитой постоянной толщины; получено начальное распределение температурного поля для последующих расчётов.

3.2. Тепловая конвекция под литосферной плитой с утолщённой и утонённой полосой в её центральной части, рассчитанная от начального распределения температурного поля.

3.3. Тепловая конвекция под литосферной плитой с квадратным в плане утолщением в её центральной части (кратоном) и тепловая конвекция под литосферной плитой, содержащей два кратона.

3.4. Трёхмерное моделирование конвекции под кратонами Центральной Азии.

⁵ Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решения разностных схем. М. «Наука». – 1979. – 319 с.

Число Рэлея, характеризующее режим конвекции, было выбрано равным $Ra = 3,04 \cdot 10^5$, что отвечает современным представлениям об условиях в недрах Земли. Основные параметры задачи в системе СИ, пригодные для верхней мантии:

$$d = 700000 \text{ м}, \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{С}, \rho = 3300 \text{ кг/м}^3,$$

$$\Delta T = 1800 \text{ }^\circ\text{С}, g_z = 10 \text{ м/с}^2, \eta_0 = 1,10871 \cdot 10^{21} \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$$

Зависимость обезразмеренной вязкости от температуры и глубины (литостатического давления) выражена следующей хорошо известной формулой:

$$\eta(x, y, z, t) = \exp(b(1 - z) - aT(x, y, z, t)). \quad (22)$$

Здесь параметры $a = 3,89$ и $b = 5,84$ обеспечивают перепад обезразмеренной вязкости на четыре порядка.

В модели конвектирующая область сверху перекрыта кондуктивным слоем постоянной толщины 120 км, соответствующим континентальной литосфере. Температура рассчитывалась во всём параллелепипеде. Уравнения движения рассчитывались вне литосферы. Расчёты этой главы проводились в переменных векторный потенциал – завихренность. На основе результатов расчётов получено следующее.

3.1. Геодинамическая модель тепловой конвекции под литосферной плитой постоянной толщины играет принципиальную роль при численном моделировании динамики континентальной верхней мантии. По современным представлениям, мантия Земли находится в режиме конвекции уже более 4000 млн лет. Важный результат трёхмерного численного моделирования тепловой конвекции под плитой постоянной толщины состоит в том, что переход от $2D$ к $3D$ моделированию показал, что учёт трёхмерности в моделях кардинально меняет не только структуру течения, но и её эволюционные характеристики, сокращая примерно в три раза время выхода системы на стационарный режим. Время выхода системы на этот режим оценивается на основе результатов расчётов величиной порядка 2000 млн лет (~ 7000 млн лет в $2D$ -моделировании).

3.2. Изучение влияния неоднородной литосферы на режим конвекции в верхней мантии началось с геодинамической модели, в которой толстый участок литосферы (кратон) представлен в виде протяжённой вдоль оси y в плоскости xu полосы шириной в 1000 км и толщиной в 200 км. При этом постоянная толщина основного участка литосферы, как отмечалось выше, составляла 120 км.

Рассматривалась также инверсная ситуация: литосфера имела толщину 200 км за исключением полосы (ловушки) шириной в 1000 км, где литосфера утонена до 120 км. Эти случаи интересны тем, что позволяют исследовать, насколько $2D$ моделирование процессов тепловой конвекции в мантии отвечает реальной трёхмерной ситуации в недрах.

Характерной особенностью подобных структур, как уже отмечалось выше, является постоянство их строения вдоль одной из осей, что служило объяснением для использования двухмерного математического приближения. Представленные на Рисунке 2 результаты демонстрируют существенно трёхмерную структуру конвективных течений, поэтому применение двухмерного приближения для

изучения мантийной динамики даже для протяжённых геологических структур неоправданно.

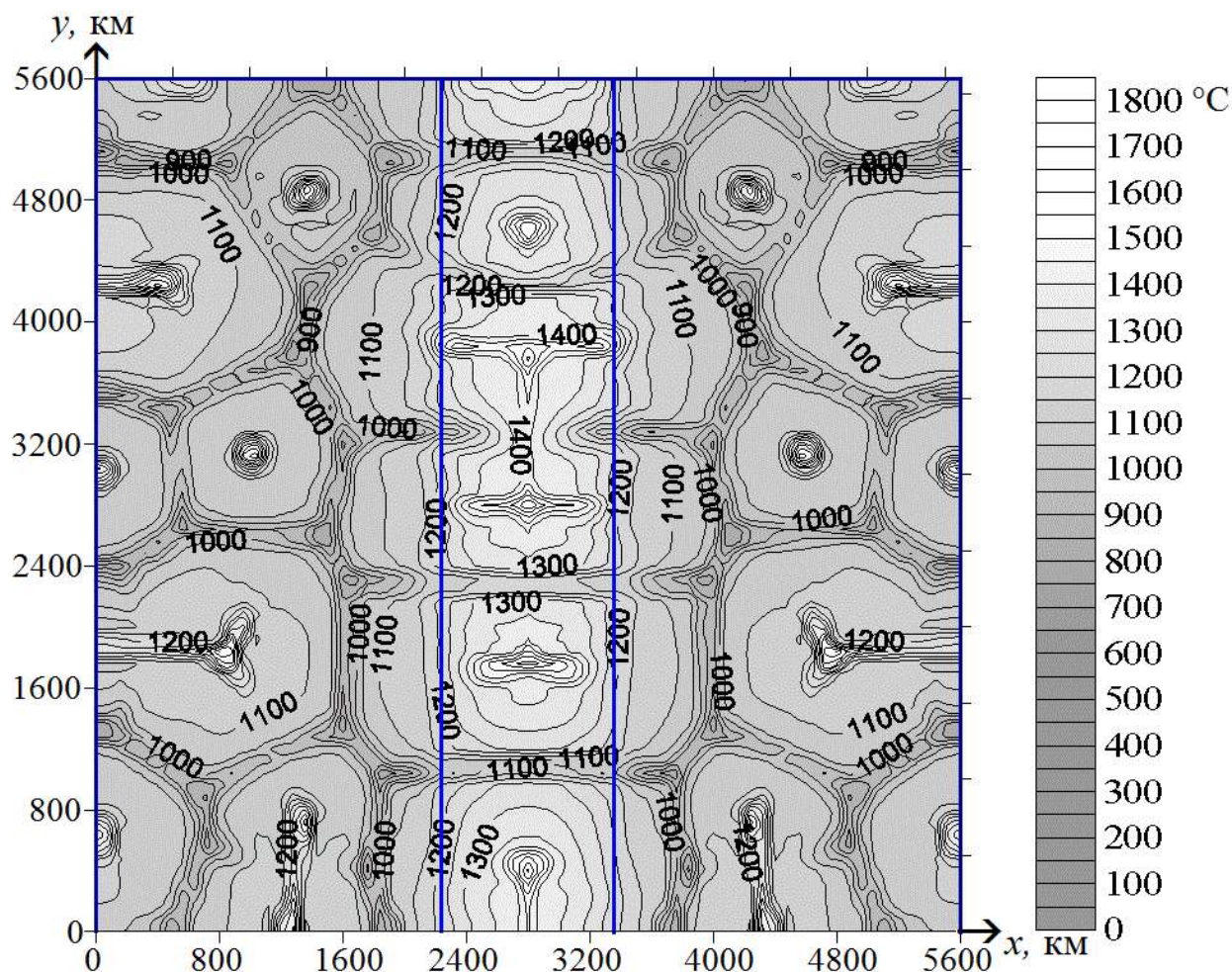


Рисунок 2 – Горизонтальное сечение поля температуры на глубине 350 км в модели конвекции под протяжённым кратоном (размер кратона $1000 \times 5600 \text{ км}^2$)

3.3. В качестве следующей геодинамической модели неоднородной литосферы рассматривался кратон – толстый квадратный в плане участок кондуктивной литосферы с длиной грани в 2000 км, окружённый литосферой с нормальной толщиной. По геофизическим данным именно такой максимальной толщиной до 200 км характеризуются наиболее древние участки континентов – докембрийские платформы, средний возраст которых составляет 2000 млн. лет.

Типичным примером подобных структур в России является Сибирская платформа, расположенная восточнее реки Енисей и простирающаяся в этом направлении до гор Верхоянья, у подножия которых течёт река Лена. В целом, по результатам выполненных численных экспериментов, можно утверждать, что эволюция структуры течения во времени под кратоном при трёхмерном моделировании существенно отличается от двухмерного случая. Главное отличие состоит в том, что в трёхмерной постановке под кратоном сохраняются как восходящие, так и нисходящие потоки, эволюционирующие во времени.

Анализ результатов расчётов показал, что кратоны служат своеобразными экранами для проникновения тепла и поэтому под ними образуются зоны

повышенной теплонасыщенности, что приводит к возникновению под кратонами стабильных устойчивых восходящих потоков мантийного перегретого материала. Распределение этого горячего вещества под кратонами порождает мелкомасштабную моду конвекции, которая выражается в обтекании кратонов с выходом нагретого мантийного вещества на периферию кратонов и подъёмом к более высоким горизонтам. В свою очередь перегретое вещество мантии может существенно ослабить в таких областях тонкую литосферу и спровоцировать рифтогенез, раздвижение плит, излияние базальтов.

Численное моделирование конвективных процессов под утонениями литосферного блока (ловушками) продемонстрировало формирование нисходящих потоков, обусловленных значительным выносом тепла через тонкую оболочку литосферной плиты. Как правило, зоны ловушек приурочены к складчатым (горным) областям планеты и, таким образом, нисходящие потоки вполне согласуются с корнями горных массивов в качестве изостатической компенсации (по Эри) в рамках изостатической интерпретации.

3.4. Продолжением вышеизложенных исследований конвективных течений в верхней мантии Земли являются исследования, в которых рассматриваются существующие (а не модельные) структурные элементы континентальной литосферы. Выполнено численное моделирование тепловой конвекции под внутриконтинентальной областью Азии, в которую входят практически все перечисленные элементы литосферы; а именно: Западно-Сибирская плита, Сибирская платформа, Тувинский комплекс микрократонов, Центрально-Азиатский складчатый пояс, Тарим и часть Северо-Китайской платформы.

Численные эксперименты проводились в параллелепипеде $\Pi = [0,4200] \times [0,4200] \times [0,700]$ км³. В континентальной литосфере (кондуктивная область) начальные условия $T_0(x, y, z, 0)$ задавались исходя из линейной

зависимости $T_0 = \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1}(z - z_2) + T_2$, в соответствии с которой температура

варьировалась от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ при глубине $z_1 = 0$ до $T_2 = 1200^\circ\text{C}$ при z_2 , равном глубине подошвы литосферы. Начальная температура $T_0(x, y, z, 0)$ в конвектирующей мантии такова: температура изменяется от $T_1 = 1200^\circ\text{C}$ при z_1 равном глубине подошвы литосферы, до $T_2 = \Delta T = 1800^\circ\text{C}$ при $z_2 = 700$ км, т.е. до глубины, выбранной в задачах для подошвы верхней мантии.

Численное моделирование показало, что, как и в случае модельных прямоугольных в плане кратонов, реальные кратоны Центральной Азии (Рисунок 4 в границах $65^\circ \leq \varphi \leq 145^\circ$, $40^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$) порождают аналогичные структуры: наблюдаются устойчивые восходящие потоки в виде плюмов и нисходящие потоки и прогретые области по периферии кратонов. Перенос мантийного вещества от оснований кратонов к верхним горизонтам (обтекание) проявляется в виде мелкомасштабной моды конвекции около бортов кратонов.

В Главе 4 излагаются результаты численного моделирования теплогравитационной конвекции в верхней мантии Земли под континентальной и

океанической литосферой переменной мощности с учётом сферической геометрии. Уравнения геодинамики (1)–(3) записываются в сферических координатах.

При постановке задачи трёхмерного моделирования конвекции в мантии Земли в сферических координатах безразмерные переменные вводились стандартным образом (далее, как правило, у безразмерных переменных оставались те же обозначения, что и у размерных):

$$r = R \cdot r', t = \frac{R^2}{\chi} t', p = \frac{\eta_0 \chi}{R^2} p', u = \frac{\chi}{R} u', \quad (23)$$

где R – радиус Земли.

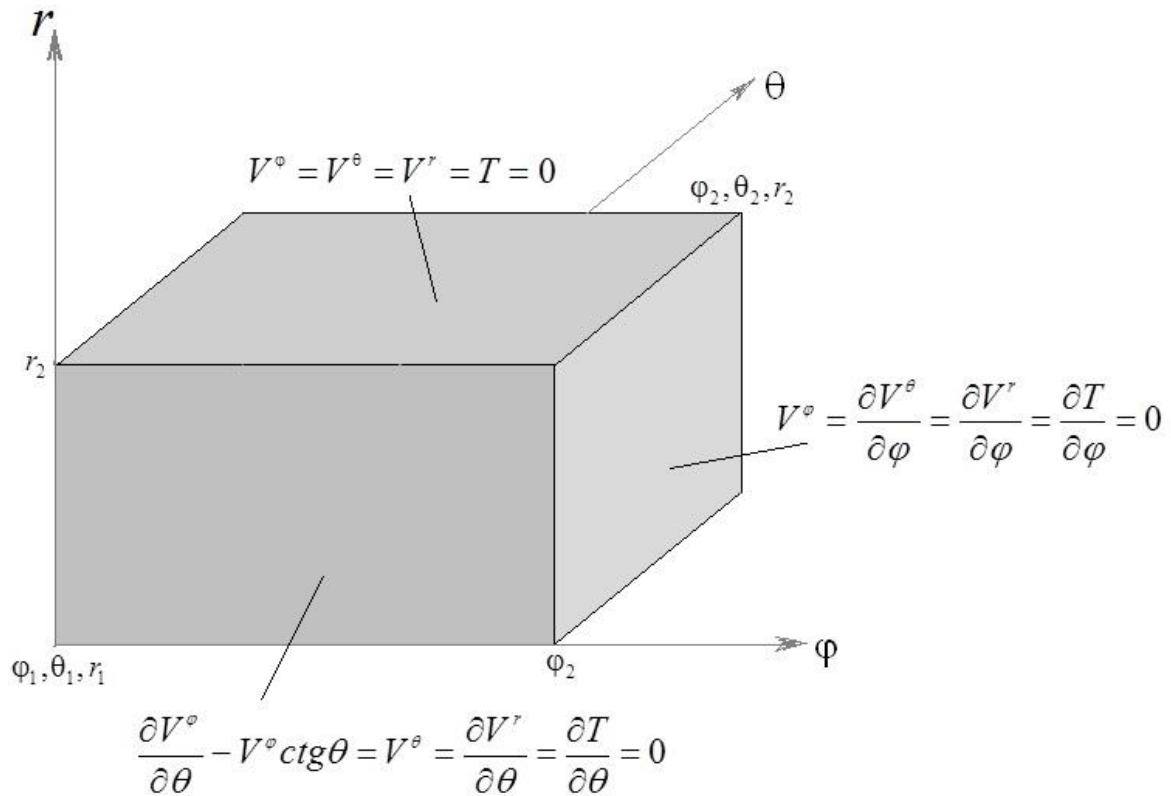


Рисунок 3 – Схематическое изображение расчётной области в сферических координатах

В сферической области $\Pi = [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]$ (Рисунок 3) для вектора скорости на боковых границах задаются условия проскальзывания, а на нижней и верхней гранях – условия прилипания; для температуры на боковых гранях ставятся условия теплоизоляции; на верхней и нижней гранях ставятся условия постоянства температуры:

на поверхностях $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1 \leq r \leq r_2$:

$$V^\varphi = \frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial V^r}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad (24)$$

на поверхностях $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1 \leq r \leq r_2$:

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - V^\varphi \operatorname{ctg} \theta = V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad (25)$$

$$\text{на поверхности } r = r_1, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2: \quad (26)$$

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad T = T_b$$

$$\text{на поверхности } r = r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2: \quad (27)$$

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0.$$

В (26) безразмерное значение $T_b = 1$ (или равно 1800°C в размерных единицах). Как и в декартовой постановке, в начальный момент времени $t = t_0$ для температуры задаются начальные условия:

$$T(\varphi, \theta, r, t_0) = \tilde{T}_0(\varphi, \theta, r). \quad (28)$$

Выполнено численное моделирование тепловой конвекции под внутриконтинентальной областью Евразии, в которую входят в виде литосферных блоков Русская платформа, Западно-Сибирская плита, Сибирская платформа, Центральнo-Азиатский складчатый пояс, Тувинский комплекс микрократонов, Тарим, Китайские платформы, Индийская и Аравийская плиты.

Для построения численной модели применялась неявная реализация метода искусственной сжимаемости.

Число Рэлея, характеризующее режим конвекции, было равным

$$\text{Ra} = \text{Ra}_R = 152\,000\,000 \quad (\text{Ra}_d = 201\,706),$$

что отвечает современным представлениям об условиях в недрах Земли.

Основные параметры задачи в системе СИ, пригодные для верхней мантии выбирались следующими:

$$\begin{aligned} R &= 6\,370\,000 \text{ м}, \quad d = 700\,000 \text{ м}, \quad \Delta T = 1\,800^\circ\text{C}, \quad \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \alpha &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \rho = 3\,300 \text{ кг/м}^3, \quad g_z = 10 \text{ м/с}^2, \quad \eta_0 = 2 \cdot 10^{21} \text{ кг/м} \cdot \text{с}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вязкость мантийного вещества задавалась в виде

$$\eta(\varphi, \theta, r, t) = \exp(b(1,89 - r) - aT(\varphi, \theta, r, t)); \quad a = 3,89, \quad b = 5,84. \quad (30)$$

На нижней кромке литосферы при постановке начального распределения температуры учитывается начальное значение температуры: $T = 1200^\circ\text{C}$. Температура рассчитывалась во всей сферической области.

Моделирование процессов в верхней мантии было ограничено внутриконтинентальной областью Евразии (Рисунок 4). На этом рисунке изображена область моделирования конвекции в верхней мантии под Евразией с расположением элементов литосферы в расчётной области. Вычисления проводились в сферической области $0^\circ \leq \varphi \leq 145^\circ$, $20^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$, $5870 \text{ км} \leq r \leq 6370 \text{ км}$.

В литосферную плиту, мощность которой 120 км, включены плиты и платформы: Русская платформа – мощность 220 км, Западно-Сибирская плита – мощность 120 км, Сибирская платформа – мощность 220 км, Центральнo-

Азиатский складчатый пояс с мощностью 80 км, Тувинский комплекс микрократонов, Тарим, Китайские платформы и Индийская плита с мощностью 220 км, Аравийская плита – с мощностью 180 км. Между Русской Платформой и Аравийской и Индийской плитами мощность литосферы равна 100 км.

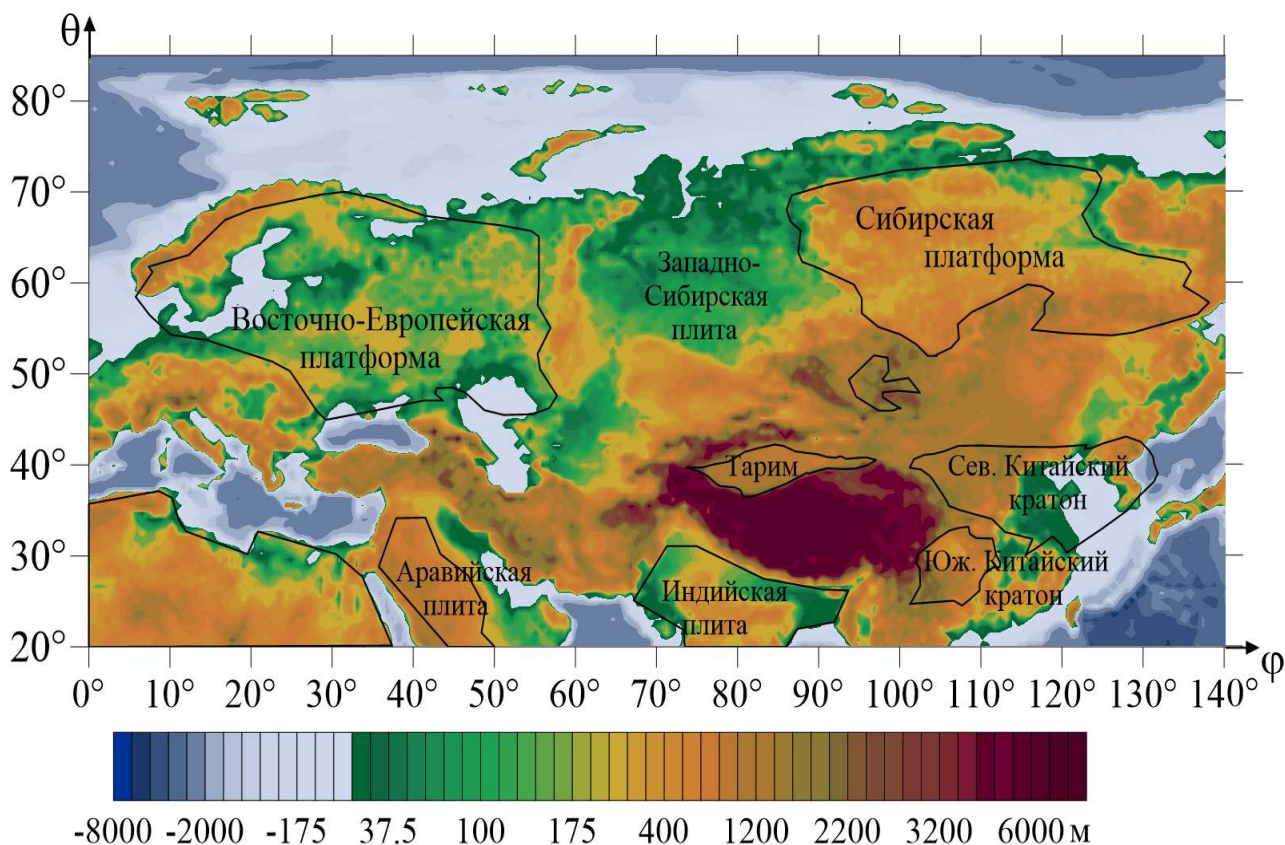


Рисунок 4 – Схема расчётной области и рельеф Евразии. Сплошными линиями выделены границы блоков с существенно различной мощностью литосферы

Конфигурация и расположение кратонов соответствуют имеющимся на сегодняшний день реальным данным. Конфигурация кратонов на поверхности представлена схемой (Рисунок 4).

Представленные здесь результаты трёхмерного численного моделирования конвекции демонстрируют повышение средней мантийной температуры под кратоном на 100°C , но вместе с тем показывают, как сложные формы рельефа кратона воздействуют на характер конвективных течений. По геолого-геофизическим данным³ в районе южнее Сибирского Кратона и севернее Тарима и Северо-Китайской платформы мощность литосферы составляет от 40 до 95 км. В численной модели толщина литосферного блока в указанном районе принималась равной 80 км. В результате численного моделирования было показано, что в зоне ловушки, как правило, преобладают нисходящие потоки холодного мантийного вещества. На глубине 300 км обнаруживается холодное (800°C - 900°C) мантийное вещество (Рисунок 5, Рисунок 6). Следует заметить, что под территорией Западно-Сибирской плиты, где мощность литосферы составляет 120 км, комплекс нисходящих потоков в среднем на 100°C выше. В частности, при рассмотрении

областей, примыкающих к Сибирскому кратону, исследовано влияние структуры литосферы на режим конвекции.

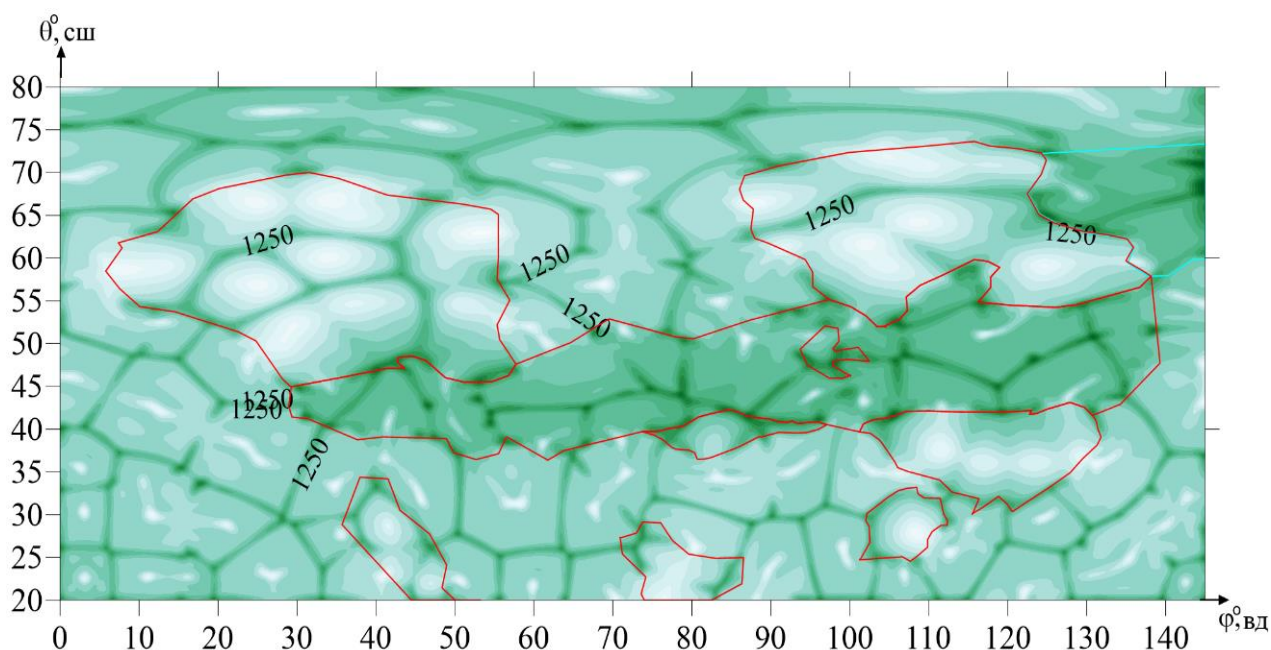


Рисунок 5 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\phi\theta$) при $r = 270$ км

В соответствии с сейсмотомографическими данными⁶ в юго-западной оконечности Сибирского кратона наблюдается низкоскоростная аномалия верхней мантии, начиная непосредственно с минимальных для региональной томографии этого района глубин в 50 км. На глубинах свыше 200 км под восточной частью Центральной Монголии располагается меньшая по амплитуде отрицательная аномалия скоростей сейсмических волн, устойчивая вплоть до подошвы верхней мантии. К северу эта аномалия вытягивается в Прихубсугулье, в южные районы Тувы. В западной части исследуемого региона располагается поле повышенных скоростных характеристик, охватывающее западную половину Хангайского нагорья и далее Котловину Больших Озёр. Верхние 250 км 3D– модели аномалий скорости Р-волн использовались для оценки мощности литосферы изучаемого региона с применением методики, описанной в работе Бушенковой и др.⁶

В пределах западной части Хангайского нагорья, помимо Сибирского кратона, выделяется другой блок с утолщённой литосферой. Частично в его границы попадают территории Южно-Хангайского плато, Котловины Больших Озёр и Прихубсугулья. В таких границах этот блок соответствует очертанию Тувино-Монгольского массива, за исключением его северной части, наиболее раздробленной процессами кайнозойского рифтогенеза. Как показало выполненное численное моделирование, мощная литосфера Сибирского кратона затрудняет вынос мантийного тепла, вследствие чего под ней возникает естественный локальный перегрев и происходит становление восходящего потока конвекции в верхней мантии под юго-западной частью кратона.

⁶ Бушенкова, Н.А. Структура верхней мантии и кайнозойский вулканизм Центральной Монголии / Н.А. Бушенкова, Е.В. Деев, Г.С. Дягилев, А.А. Гибшер // ДАН. –2008. –Т.418, №3. –С.378-382.

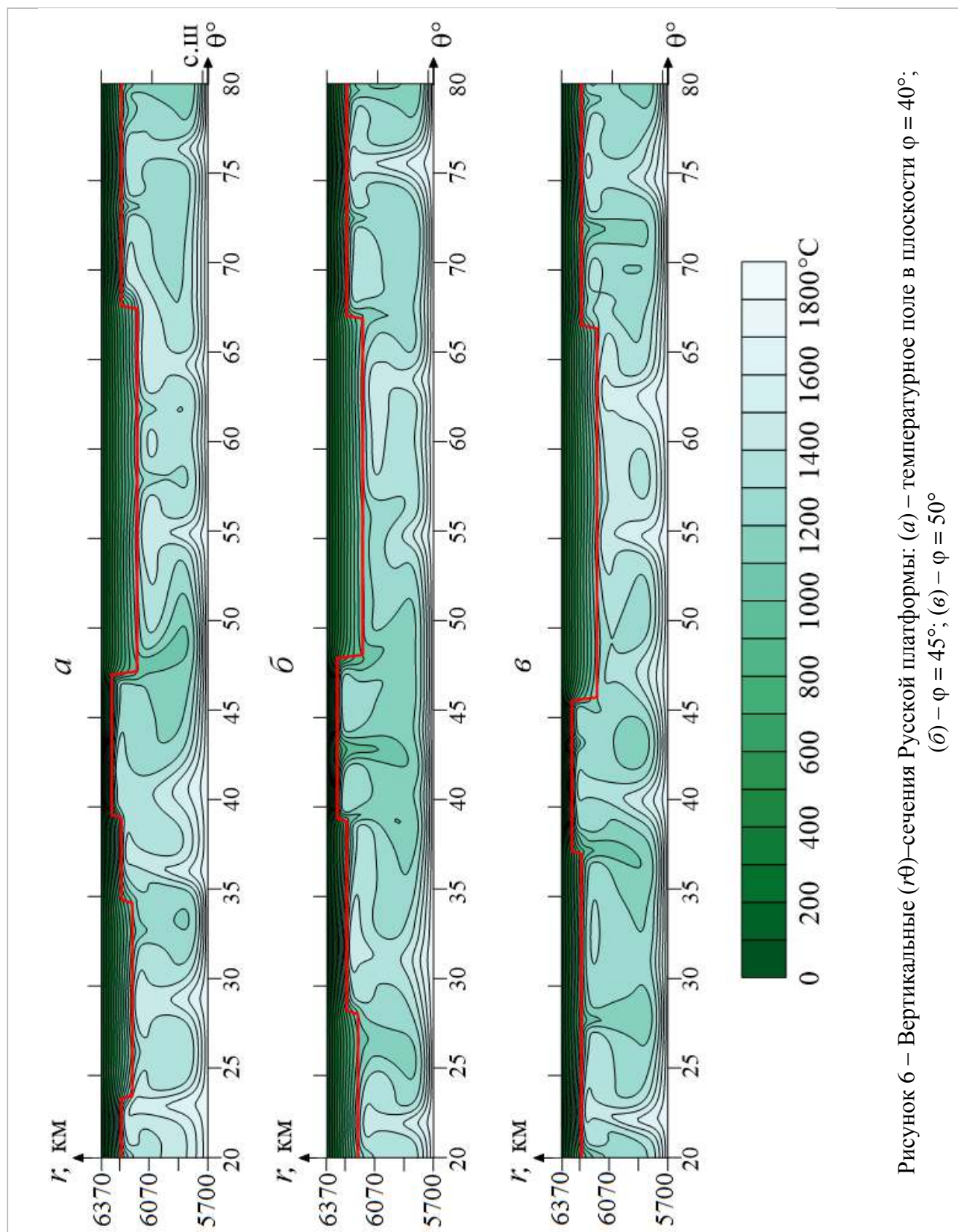


Рисунок 6 – Вертикальные $(r\theta)$ -сечения Русской платформы: (*a*) – температурное поле в плоскости $\phi = 40^\circ$;
 (*b*) – $\phi = 45^\circ$; (*c*) – $\phi = 50^\circ$

Возникновение конвективных течений в верхней мантии по причине различной мощности литосферных блоков можно рассматривать в качестве одной из основных геодинамических причин внутриконтинентального вулканизма

рассмотренного сегмента Центральной Азии⁶. Возвышенности и низменности Русской платформы согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками под ней.

При анализе рельефа Евразии (тектонические карты Восточно-Европейской и Сибирской платформ, Рисунок 4 и Рисунок 5) выясняется, что возвышенности и низменности упомянутых платформ согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками под ними [18].

В **Главе 5** представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зоне раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой.

В рамках задачи математического моделирования конвекции с применением системы уравнений (1)–(3) в сферических координатах построена геодинамическая модель погружающейся под континент плиты.

Для построения модели субдукции оказалось достаточным задать на некотором участке поверхности Земли наблюдаемые скорости расхождения литосферных океанических плит. Известно, например, что в районе срединно-атлантического медленно-спредингового хребта наблюдаемые скорости составляют 2–4 см в год⁷. Расчёты (как и следовало ожидать) показали, что в течение короткого промежутка времени (5–10 млн. лет) формируется интенсивный восходящий поток, устремлённый к области раздвижения плит. В районе сочленения океанической и континентальной плит конвективные потоки, спровоцированные спредингом, порождают нисходящий конвективный поток, который можно интерпретировать как погружающуюся под континент плиту (слэб). На передней части континентальной плиты задавались либо естественные условия скольжения, либо условия прилипания, рассчитанные по скорости раздвижения океанических плит в зависимости от заданного угла наклона неподвижной передовой кромки континентальной литосферы. В рассмотренных задачах океанические плиты моделировались в соответствии с концепцией Флейто–Йена жидкостью с повышенной на 2–3 порядка вязкостью (в сравнении с вязкостью верхней мантии); континентальная плита рассматривалась как твёрдое тело [14]. Слева (Рисунок 7) расположены раздвигающиеся от срединно-океанического хребта (СОХ) плиты, справа – неподвижный континент, мощностью 220 км. Передняя часть континента скошена под углом 45°. Шкала расстояний представлена отсчётом от дневной поверхности: 0 км соответствует расстоянию $r_2 = 6370$ км от центра Земли, –700 км соответствует $r_1 = 5670$ км.

Последовательно решены две задачи о конвекции в областях спрединга и субдукции.

5.1. Влияние спрединга на формирование субдукции около удалённого континента.

В узкой сферической области верхней мантии (Рисунок 7)

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad :$$

⁷ Добрецов, Н.Л. Основы тектоники и геодинамики. Новосибирск: НГУ, ИГМ СО РАН, 2011. 491 с.

$\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_4 = 60^\circ; \theta_1 = -2,5^\circ, \theta_2 = +2,5^\circ, r_1 = 5670 \text{ км}, r_2 = 6370 \text{ км}$
 моделируется спрединг (расхождение плит). Справа от оси спрединга ($\varphi_2 = 15^\circ$)
 расположен континент, протяжённость которого $\Lambda/2$, ($\Lambda = \varphi_4 - \varphi_1 = 60^\circ$).

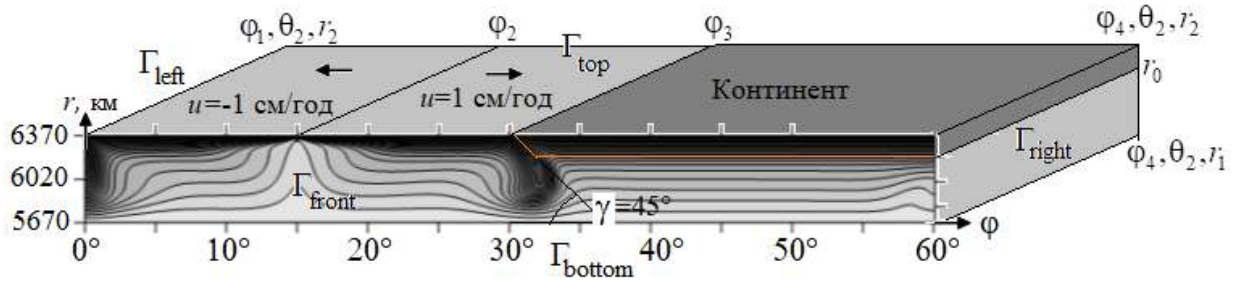


Рисунок 7 – Рассчитанное в верхней мантии Земли поле температуры в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$. Результаты расчётов для значения времени 70 млн лет. Изолинии представлены с шагом 100°C

Координаты континента на поверхности:

$$r = r_2, \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_3 = 30^\circ, \varphi_4 = 60^\circ.$$

Угол наклона левой континентальной грани γ задан равным 45° . На всех вертикальных границах для температуры были поставлены условия симметрии (адиабатическая стенка); на подошве верхней мантии ($z = 5670 \text{ км}$) задавалась температура, равная 1800°C . На верхней границе ($z = 6370 \text{ км}$) температура равна 0°C ; для вектора скорости на $\Gamma_{\text{left}}, \Gamma_{\text{front}}, \Gamma_{\text{back}}$ поставлены условия проскальзывания, а на границах Γ_{right} – условия протекания. В качестве граничного условия на оставшихся участках границы ставятся условия прилипания для компонент скорости. Значения параметров задачи для верхней мантии полагались равными приведённым в (29). Вязкость определялась стандартной формулой (30). Длина расчётной области равна 60° .

Результаты численного моделирования спрединга и субдукции в верхней мантии Земли представлены рисунком (Рисунок 7). Структура зоны субдукции является результатом естественного процесса раздвигания плит и геометрии континентальной плиты. Затенённая область (сгущение изотерм в пределах $\varphi_3 < \varphi < 35^\circ$ в центре фигуры) соответствует тонущей части океанической литосферной плиты (слэбу). Слэб в нашем случае представляет собой конвективный нисходящий поток мантийного вещества, температура которого заключена в пределах $0^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}$. Условия, поставленные в этом случае на подошве верхней мантии, не позволяют погружающемуся конвективному потоку проникнуть за пределы верхней мантии. Скорость погружения низкотемпературного следа практически равна скорости раздвижения плит [14,16].

5.2. Формирование субдукции вследствие надвига микроконтинента на пассивную океаническую литосферу.

При постановке задачи учитывалось следующее: в прямоугольный сферический параллелепипед

$$\Pi = [\varphi_1, \varphi_6] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2] \quad (31)$$

(обозначения согласованы со схемой начального расположения движущегося континента (Рисунок 8)), заполненный мантийной жидкостью, погружен континент. В этом случае для вектора скорости на всех гранях погруженного в мантию континента ставятся условия прилипания. На внутренних гранях континента, погруженных в мантию, граничные условия для температуры не предусмотрены.

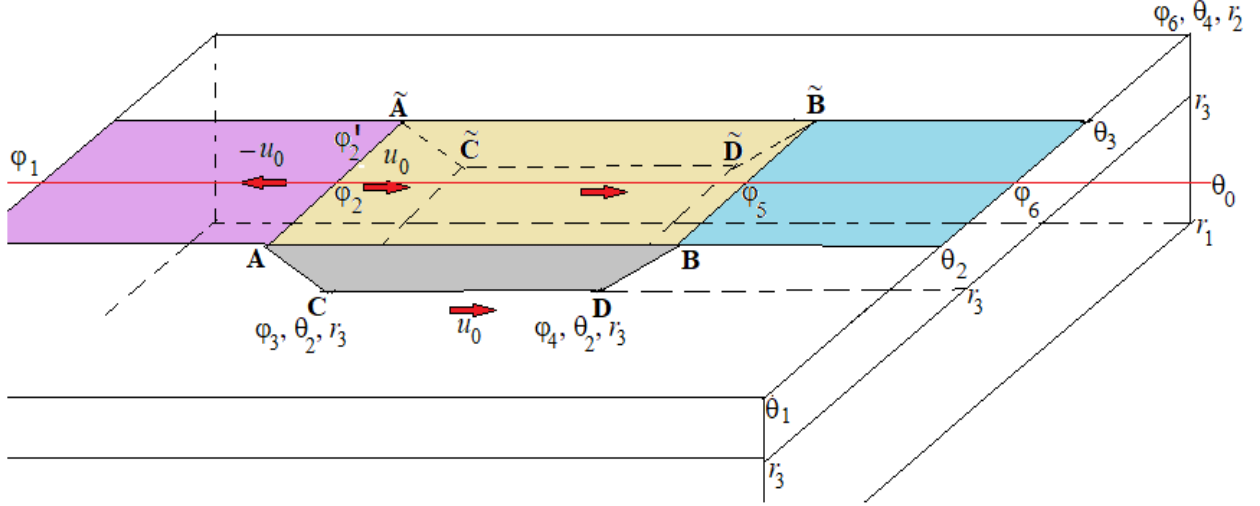


Рисунок 8 – Схема начального расположения движущегося континента. Угол $\angle CAB = \angle \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = \angle DBA = \angle \tilde{D}\tilde{B}\tilde{A} \equiv \gamma = 35^\circ$. Пунктирные линии – невидимые. Стрелки указывают направления движения плит

Континент в начальный момент времени выделен точками:

$$A(\varphi_2, \theta_2, r_2), B(\varphi_5, \theta_2, r_2), D(\varphi_4, \theta_2, r_3), C(\varphi_3, \theta_2, r_3), \\ \tilde{A}(\varphi_2, \theta_3, r_2), \tilde{B}(\varphi_5, \theta_3, r_2), \tilde{D}(\varphi_4, \theta_3, r_3), \tilde{C}(\varphi_3, \theta_3, r_3).$$

Линия на рисунке $A\tilde{A}$ – это линия срединно-океанического хребта (СОХ), разделяющая плиты, от которой они расходятся в противоположных направлениях. Окончательно, на начальный момент времени, граничные условия следующие: на поверхностях $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_6, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_4, r_1 \leq r \leq r_2$ – условия протекания:

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} = V^\theta = V^r = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

на плоскостях $\theta = \theta_1, \theta = \theta_4, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, r_1 \leq r \leq r_2$ – условия проскальзывания:

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - V^\varphi \operatorname{ctg} \theta = V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0;$$

на всей подошве верхней мантии при $r = r_1, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_4$:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad T = T_b, \quad (32)$$

на дневной поверхности при $r = r_2$, перед континентом $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, за континентом $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4$, справа от континента $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_6, \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ температура и скорости нулевые; на поверхности $r = r_2$ слева от СОХ $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ задано движение литосферной плиты

$$V^\varphi = -u_0; \quad V^\theta = V^r = T = 0; \quad (33)$$

на подошве континента $r = r_3, \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ и на остальных его гранях $ACDB, A\tilde{A}\tilde{C}\tilde{C}, \tilde{A}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{B}, DB\tilde{B}\tilde{D}$:

$$V^\varphi = +u_0; \quad V^\theta = V^r = T = 0. \quad (34)$$

Исключения для $ACDB, A\tilde{A}\tilde{C}\tilde{C}$ и $\tilde{A}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{B}$: на линии $A\tilde{A}$ при $t = 0$ скорости и температура нулевые. Как только континент сдвинется, слева от него образуется полоса приращённой океанической литосферы.

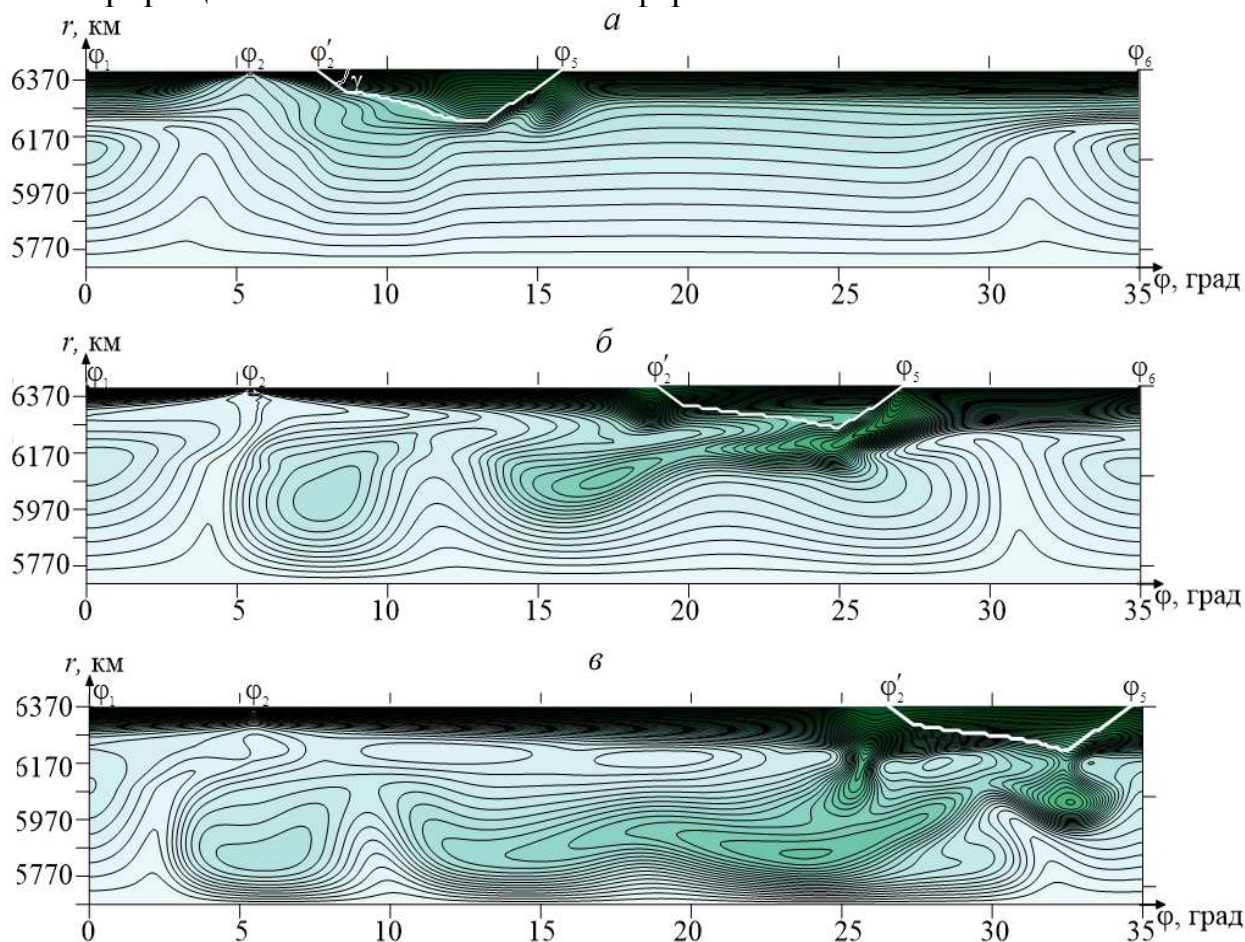


Рисунок 9 – Изолинии поля температуры: иллюстрация эволюции конвекции под литосферой в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$: a – 11,0 млн лет, b – 70,4 млн лет, v – 150,0 млн лет. Движущийся континент обозначен сплошной светлой линией в пределах от φ'_2 до φ_5

В этом случае и до конца продвижения плиты граничные условия между СОХ и кромкой континента на поверхности $r = r_2, \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi'_2, \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ (Рисунок 9) такие как и в (34); (и на линии $A\tilde{A}$, "ушедшей" от СОХ – условия (34)). На самой линии СОХ, которая остаётся неподвижной: $V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0$. В (32) температура T_b – соответствует единице в безразмерных и 1800°C – в размерных величинах. Для полной постановки задачи в момент времени $t = t_0 = 0$ для температуры ставятся начальные условия (28).

С целью численного анализа процесса формирования субдукции вследствие надвига континента на пассивную океаническую литосферу рассматривалась следующая модельная геодинамическая задача, приближённо соответствующая изложенной в начале раздела геологической ситуации.

В верхней мантии Земли в узкой области вдоль экватора ($\theta_0=0^\circ$)

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4, \quad r_1 \leq r \leq r_2); \\ \varphi_1 = 0^\circ, \varphi_6 = 35^\circ; \quad \theta_1 = -5^\circ, \theta_4 = +5^\circ; \\ r_1 = 5\,670 \text{ км}, r_2 = R = 6\,370 \text{ км}. \end{aligned} \quad (35)$$

моделируется спрединг. Правее оси спрединга ($\varphi_2 = 5,70^\circ$) располагается континент, протяжённость которого на поверхности $\Lambda_c = \varphi_5 - \varphi_2 = 8,60^\circ$. Континент характеризуется мощностью $S = 210 \text{ км}$ ($r_L = r_3 = R - S = 6160 \text{ км}$). Левая и правая грани континентальной плиты скошены под углом $\gamma = 35^\circ$ к горизонту (Рисунок 9,а). От срединно-океанического хребта (СОХ) ($\varphi_2 = 5,70^\circ$) континент начинает движение в восточном направлении со скоростью $u = u_0 = 2,00 \text{ см/год}$. Плита, расположенная слева от СОХ, начинает движение в противоположном направлении с такой же скоростью $u = -u_0$. Пассивная океаническая литосфера, на которую наезжает континент, заключена в пределах $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_6$.

Географические координаты континента:

$$\begin{aligned} r = r_2, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_5, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \quad \varphi_2 = 5,7^\circ, \quad \varphi_5 = 14,3^\circ; \\ r = r_3 = r_L, \quad \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \tilde{S}, \quad \varphi_4 = \varphi_5 - \tilde{S}; \\ \tilde{S} = \frac{S}{R} \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \frac{180}{\pi}, \quad \theta_2 = -3^\circ, \quad \theta_3 = 3^\circ. \end{aligned} \quad (36)$$

Динамика конвекции в окрестности зоны спрединга иллюстрируется изолиниями температурного поля (Рисунок 9). Результаты численных экспериментов показывают, что надвигающийся континент подминает под себя океаническую литосферу, порождая тем самым слэб, уходящий в глубокие горизонты верхней мантии.

На Земле, согласно геофизическим данным⁸, возраст океанической литосферы не превышает 166 млн лет. Кроме того, существует теоретическая оценка предельного возраста океанической литосферы, равная 150 млн лет⁸.

В интервале времен от 50 до 100 млн лет можно наблюдать зарождение «тяжелой капли» (Рисунок 9,б), которая впоследствии оторвётся от кромки континента и образует слэб не позднее 166 млн лет с начала процесса раздвижения плит. В выполненном численном эксперименте отрыв «тяжелой капли» хорошо согласуется по времени с теоретической оценкой⁸ (Рисунок 9,в).

Для проверки надёжности полученных результатов была решена задача, аналогичная предыдущей, но с удлинённой в направлении оси φ областью ($\varphi_6 = 47,50^\circ$) и с более протяжённым континентом ($\varphi_2 = 3,00^\circ$, $\varphi_5 = 18,67^\circ$).

Полученные результаты позволяют сравнить протекание процессов при различных геометрических характеристиках. Как и в первом варианте, надвиг континента на океаническую литосферу порождает слэб, уходящий под континент; прослеживается возникновение «холодной» капли. Предлагаемая математическая модель формирования слэба может быть использована для расчетов конкретных объектов и геологических обстановок.

⁸ Аплонov, С.В. Геодинамика: Учебник – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 360 с.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации, которые сводятся к следующему:

1. Построены на основе методов расщепления методы решения задач конвекции в верхней мантии Земли и разработаны:

- численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением естественных переменных и неявного метода расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления (в декартовых и сферических координатах);
- численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с использованием естественных переменных и неявной реализации метода искусственной сжимаемости (в декартовых и сферических координатах);
- численная модель трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли, с применением переменных «векторный потенциал–завихренность» (в декартовых координатах).

Впервые в рассматриваемом классе задач успешно применены метод последовательности сеток и экстраполяция по Ричардсону, позволившие существенно повысить эффективность численных моделей. Разработаны комплексы программ и выполнено детальное тестирование построенных численных моделей.

2. Осуществлено численное моделирование конвекции под континентальной плитой переменной мощности. Продемонстрирован существенно трёхмерный характер течения. Применение двумерного моделирования для изучения и понимания мантийной динамики неприемлемо даже для протяжённых структур.

3. Принципиальный результат трёхмерного моделирования тепловой конвекции в верхней мантии под кратонами состоит в выявлении мелкомасштабной моды конвекции непосредственно под литосферой на «астеносферном» уровне глубин 200–350 км. Данная мода развивается по периферии кратонов и учёт её влияния может объяснить особенности режима траппового магматизма древних кратонов по их периферии.

4. Проведено математическое моделирование конвекции под литосферой Евразии в сферических координатах в естественных переменных с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости. Показано, что мощная литосфера Сибирского кратона сдерживает вынос мантийного тепла, вследствие чего под ней создаётся естественный локальный перегрев и формируется восходящий поток конвекции в верхней мантии под юго-западной частью кратона. В восточной части Центральной Монголии формируется парный ему восходящий поток. Положение этих восходящих потоков согласуется с распределением отрицательных аномалий сейсмических скоростей, положением аномалий наблюдаемого гравитационного поля и распределением теплового потока. Возвышенности и низменности Русской платформы согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками под ней.

5. Построены численные модели спрединга и субдукции. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба

(субдукция) под континентальной литосферой. Указан механизм возникновения погружающихся холодных гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы под воздействием архимедовых сил. Получены тепловые аномалии, имеющие вид слэбов, погруженных в мантию.

6. В условиях надвига континента на пассивную океаническую литосферу получены тепловые аномалии, имеющие вид тяжёлой гравитационно-неустойчивой холодной «капли», возникновение и отрыв которой от кромки континента по времени хорошо согласуется с теоретическими оценками отрыва приращённого в процессе спрединга мантийного материала с образованием слэба, погружающегося в мантию.

Автор благодарен Черных Г.Г. за постоянное внимание к работе.

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Тычков, С.А. Тепловая конвекция в верхней мантии континентов и её эффект в геофизических полях / С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский, В.В. Червов // Геология и геофизика. – 1999. – Т.40, №9. – С. 1275–1290.
2. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала / В.В. Червов // Вычислительные технологии. – 2002. – Т.7, №1. – С. 114–125.
3. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток / В.В. Червов // Вычислительные технологии. – 2002. – Т.7, №3. – С. 85–92.
4. Тычков, С.А. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // ДАН. – 2005. – Т.402, №2. – С. 248–254.
5. Тычков, С.А. Численная модель трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли. / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Физика Земли. – 2005. – №5. – С. 48–64.
6. Tychkov, S.A. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – Vol.20, No.5. – P. 483–500.
7. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам / В.В. Червов // Вычислительные технологии. – 2006. – Т.11, №4. – С. 73–86.
8. Владимиров, А.Г. Пермский магматизм и деформации литосферы Алтая как следствие термических процессов в земной коре и мантии / А.Г. Владимиров, Н.Н. Крук, В.В. Червов [и др.] // Геология и геофизика. – 2008. – Т.49, №7. – С. 621–636.
9. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости / В.В. Червов // Вычислительные технологии. – 2009. – Т.14, №3. – С. 86–92.
10. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерной конвекции под кратонами Центральной Азии / В.В. Червов, А.В. Червов, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии. – 2009. – Т.14, №5. – С. 114–121.

11. Chervov, V.V. Numerical Modeling of 3D Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Lithosphere of Central Asia / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2012. – Vol.21, No.1. – P. 78–89.
12. Koulakov, I. Slab interactions in the Taiwan region based on the P- and S- velocity distributions in the upper mantle / I. Koulakov, V. Chervov [et al.] // Journal of Asian Earth Sciences. – 2013. – Vol.79. – P. 53–64.
13. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Three-Dimensional Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Eurasia Lithosphere / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2014. – Vol.23, No.2. – P. 105–111.
14. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли под литосферой Евразии / В.В. Червов, Г.Г. Черных, Н.А. Бушенкова, И.Ю. Кулаков // Вычислительные технологии. – 2014. – Т.19, №5. – С. 101–114.
15. Бушенкова, Н.А. Субмеридиональная пограничная зона в Азии: сейсмичность, структура литосферы и распределение конвективных потоков в верхней мантии / Н.А. Бушенкова, О.А. Кучай, В.В. Червов // Геодинамика и тектонофизика. – 2018. – Т.9, №3. – С. 1007–1023.
16. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Convection in the Zone of Spreading and Subduction / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2019. – Vol.28, No.1. – P. 14–25.
17. Chervov, V.V. Flow in Subduction Zone Against Bevel Angle of Leading Edge of Continent Overthrusting on Passive Oceanic Lithosphere / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2020. – Vol.29, No.3. – P. 460–466.
18. Червов, В.В. Тектонические прогибы на Восточно-Европейской и Сибирской платформах: численное моделирование конвекции под Евразийским континентом / В.В. Червов, Н.А. Бушенкова, Г.Г. Черных // Геодинамика и тектонофизика. – 2021. – Т.12, №1. – С. 84–99.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

19. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность–векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры «PSIOMEGA/2015» / В.В. Червов // Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2018610212 от 09.01.2018 г.
20. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли в сферических координатах «Navie_Spherical_Coords/2017» / В.В. Червов // Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2018616280 от 28.05.2018 г.
21. Червов, В.В. Программа моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам «Mantle_RFP/2018» / В.В. Червов, Г.Г. Черных // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018660074 от 16.08.2018 г.
22. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли неявным методом искусственной сжимаемости в декартовой системе координат «Mantle_IS/2019» / В.В. Червов // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2019664642 от 11.11.2019 г.